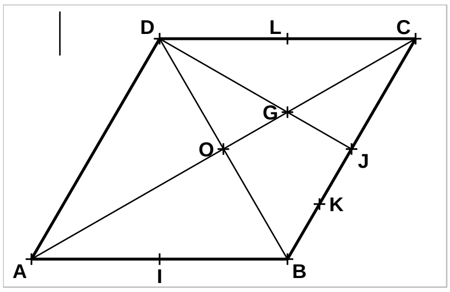
Devoir de synthèse N°1 mathématiques

4ème Maths **Décembre 2020** **Durée 3h**

Exercice 1 (5 points)



Le plan est orienté dans le sens direct. Soit $ABCD$ un losange de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$;et on désigne par : I , J , K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ $[BJ]$ et $[CD]$ et par G le centre du gravité du triangle BCD

1) a) Caractériser $f = S_{(DJ)} o S_{(DB)}$
   b) Montrer que D est le milieu du segment $[AE]$ où E est l'image de C par f
2) Soit g la rotation de centre G et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$
   Déterminer la droite Δ tel que $g = S_{(DJ)} o S_{\Delta}$. Caractériser alors l'application $g^{-1}$of
3) Soit h une isométrie du plan qui vérifie : $h(A) = B$, $h(B) = D$ et $h(C) = E$
   a) Montrer que $h = S_{(DJ)} o S_O$ où S_O est la symétrie centrale de centre O
   b) Déterminer $t_{\overrightarrow{JB}} o h(O)$ et $t_{\overrightarrow{JB}} o h(I)$
   c) En déduire que h est une symétrie glissante dont-on déterminera le vecteur et l'axe
4) Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des isométries F qui transforme le segment $[AC]$ en le segment $[EB]$
   a) Montrer l'équivalence : (F appartient à $\mathcal{E}$) si et seulement si (le segment $[AC]$ est globalement invariant par $H = S_{(DJ)} o F$)
   b) En déduire l'ensemble $\mathcal{E}$

Exercice 2 (5 points)

Le plan complexe P étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$; Soit m un nombre complexe

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_m) : (i-1)z^2 + (1-i)(m-i)z - 2(m-i)^2 = 0$.
2) Soit les points M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2 les solutions de (E_m)
   Déterminer les ensembles décrit par chacun des points M_1 et M_2 lorsque m varie et $\text{Arg}(m) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$
3) Soit f une application du P vers lui-même tel que à tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = (1 + i\,m)\,\bar{z} + (1-i)(m-i)$
   a) Montrer que f est une isométrie de P si et seulement si $m = i + e^{i\theta}$ où θ est un réel de $]-\pi;\pi]$
   b) On prend $m = i + e^{i\theta}$ et soit M un point de P d'affixe z et $M" = fof(M)$
   Montrer que z" l'affixe de M" est donner par $z" = z + (1-i)(e^{i\theta} - 1)$
   En déduire que si $\theta \neq 0$ alors f n'admet aucun point invariant
   c) On prend $m = 1 + i$. Déterminer l'ensemble des points invariants par f puis caractériser f
   d) Pour $m = i + e^{i\theta}$ avec $\theta \neq 0$
   Soit A le point d'affixe 1 ; Déterminer les affixes des points $A' = f(A)$ et $A" = f(A')$
   Montrer que f n'est pas une translation puis donner la nature de f

Exercice 3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $[0.+\infty[$ par : $f(x)=\frac{2(x+1)}{x^2+2x+2}$ .On désigne par (C) sa courbe répresentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) Dresser le tableau des variations de la fonction f

   b) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans $[0.+\infty[$ une solution unique $\propto$ et que $\propto\in\left]\frac{4}{5};1\right[$

   c) Construire la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0.+\infty[$ sur $]0;1]$. On note f^{-1} la fonction réciproque de f.

   b) Construire la courbe (C') la courbe répresentative de f^{-1} dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

   c) Montrer que pour tout $x\in]0;1]$, on a : $f^{-1}(x)=\frac{1-x+\sqrt{1-x^2}}{x}$

   d) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur $]0;1]$ et calculer $(f^{-1})'(x)$ lorsqu'il existe.

3) Pour tout $x\in]0;1]$, on pose : $h(x)=f^{-1}(\sqrt{x})$
   a) Montrer que h est dérivable sur $]0;1[$ et calculer $h'(x)$ pour tout $x\in]0;1[$
   b) Etudier la dérivabilité de h à gauche en 1

4) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $t_n=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k h(\frac{1}{k})$
   Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a : $t_n=\sqrt{2n}$. Donner alors : $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{n}}\,h(\frac{1}{k})$.

Exercice 4 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0;\frac{\pi}{2}]$ par : $g(x)=\sqrt{2\cot an(x)}$.

1) a) Etudier la dérivabilité de g à gauche en $\frac{\pi}{2}$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu

   a) Montrer que g réalise une bijection de $]0;\frac{\pi}{2}]$ sur $[0.+\infty[$ on note g^{-1} sa fonction réciproque

   b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]0.+\infty[$ et que pour tout $x\in[0.+\infty[$ on a : $(g^{-1})'(x)=\frac{-4x}{x^4+4}$

2) On pose pour tout $x\in]0.+\infty[$, $k(x)=g^{-1}(\sqrt{2x})+g^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{x}}\right)$

   a) Montrer que k est dérivable sur $]0.+\infty[$ et que pour tout $x\in]0.+\infty[$ on a : $k'(x)=0$

   b) Calculer $k(\sqrt{2x})$ puis déduire que pour tout $x\in]0.+\infty[$ on a : $g^{-1}(\sqrt{2x})=\frac{\pi}{2}-g^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{x}}\right)$

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on pose : $U_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}g^{-1}(\sqrt{2k})$ et $V_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}g^{-1}(\sqrt{\frac{2}{k}})$

   a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a : $g^{-1}(\sqrt{2n})\le U_n\le g^{-1}(\sqrt{\frac{2}{n}})$

   b) En déduire que si(U_n) est convergente vers un réel c alors $0\le c\le\frac{\pi}{2}$ et (V_n) converge vers $\frac{\pi}{2}-c$